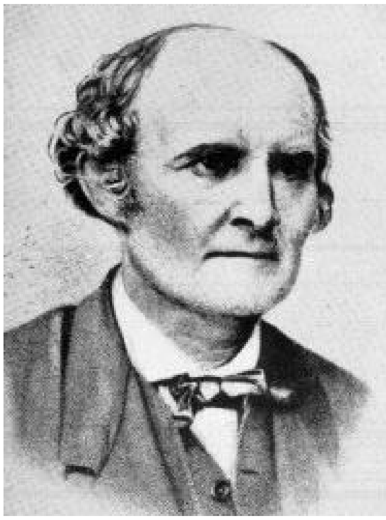
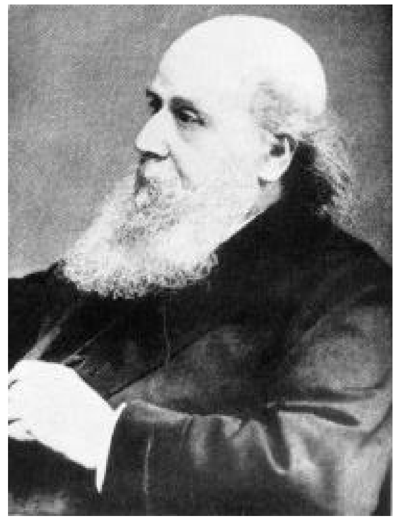
Capítulo Vigesimoprimero
GEMELOS INVARIANTES

CAYLEY Y SYLVESTER


Cayley


Sylvester

La teoría de invariantes surgió a la vida llevada por la fuerte mano de Cayley, pero constituyó finalmente una obra completa de arte, para admiración de las futuras generaciones de matemáticos, debido particularmente a los destellos de la inspiración con que la iluminó la inteligencia de Sylvester

P. A. MacMahon

"Es difícil dar una idea de la vasta extensión de la Matemática moderna. La palabra "extensión" no es la exacta, pues con ella quiero expresar plenitud de bellos detalles; no una extensión completamente uniforme, como la de una estéril llanura, sino el panorama de un bello país- visto al principio a distancia, pero que debe ser recorrido y estudiado en todos los aspectos, desde las colinas y los valles hasta los ríos, rocas, bosques y flores. Pero como para todas las restantes cosas, también para la teoría matemática, la belleza puede ser percibida, pero no explicada".

Estas palabras pronunciadas en el discurso presidencial de Cayley, en 1883, ante la Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia, podrían muy bien ser aplicadas a su colosal producción. En su prolífica capacidad inventiva Euler, Cauchy y Cayley se hallan en una categoría, con Poincaré (que murió mucho más joven que cualquiera de los otros) tras ellos a bastante distancia. Esto se refiere únicamente al volumen de la obra de estos hombres; su calidad es otra cuestión, que debe ser juzgada, en parte por la frecuencia con que las ideas engendradas por estos gigantes se repiten en la investigación matemática, y en parte por la simple opinión personal y por los prejuicios nacionales.

La observación de Cayley acerca de la vasta extensión de la Matemática moderna sugiere que limitemos nuestra atención a algunos de los rasgos de su propia obra que introducen nuevas ideas de gran alcance. La obra sobre la que reposa su máxima fama es la teoría de invariantes, que se desarrolló de un modo natural de aquella vasta teoría de la que él, brillantemente apoyado por su amigo Sylvester, fue el creador y el elaborador nunca superado. El concepto de invariante es de gran importancia para la física moderna, particularmente para la teoría de la relatividad, pero no sólo por esto merece atención. Las teorías físicas están evidentemente sometidas a revisión; la teoría de invariantes, como una adición permanente al pensamiento matemático puro, parece reposar sobre terreno más firme.

Otra de las ideas debidas a Cayley, la de la Geometría del "hiperespacio" (espacio de *n* dimensiones), tiene una significación científica semejante, pero posee incomparablemente mayor importancia como Matemática pura. La teoría de matrices es también invención de Cayley. En la Geometría no euclidiana Cayley preparó el camino para el espléndido descubrimiento de Klein, de que la Geometría de Euclides y las Geometrías no euclidianas de Lobatchewsky y Riemann son simplemente aspectos diferentes de un tipo de Geometría más general, que las abarca como casos especiales. La naturaleza de esas contribuciones de Cayley serán brevemente resumidas después de haber bosquejado su vida y la de su amigo Sylvester.

Las vidas de Cayley y de Sylvester deberían escribirse simultáneamente, si esto fuera posible. Cada una de ellas es el reverso perfecto de la otra, y la vida de cada uno de estos matemáticos, suple en gran medida, lo que falta en la del otro. La vida de Cayley fue serena; Sylvester, como él mismo hace notar con amargura, gastó gran parte de su espíritu y energía "combatiendo contra el mundo". El pensamiento de Sylvester era a veces turbulento; el de Cayley era siempre fuerte, tenaz, y reposado. Cayley rara vez se permitía expresiones que no fueran las de una enunciación matemática precisa. El símil citado al comenzar este capítulo es una de las raras excepciones. Sylvester difícilmente podía hablar de Matemática sin hacer gala de su naturaleza poética, casi oriental, y de su inextinguible entusiasmo que frecuentemente le llevaban a estados de arrebato. Sin embargo, fueron íntimos amigos y se inspiraron recíprocamente algunas de las mejores obras que estos hombres realizaron, por ejemplo en las teorías de invariantes y matrices. (Véase más adelante.).

Tratándose de dos temperamentos tan distintos no puede sorprender que su amistad no siempre se deslizara llanamente. Sylvester estaba con frecuencia a punto de explotar. Cayley dejaba obrar serenamente la válvula de la serenidad, confiando en que su excitable amigo recobrarla el juicio cuando pudiera pensar tranquilamente en lo que estaban discutiendo. En cambio Sylvester no se daba cuenta de su fogosa indiscreción. En muchos respectos, la extraña pareja semejaba a dos recién casados, salvo el hecho de que en esta amistad uno de los compañeros jamás perdía la paciencia. Aunque Sylvester tenía siete años más que Cayley, comenzaremos con éste. La vida de Sylvester choca en la tranquila corriente de la vida de Cayley, como contra una roca que se elevase en la mitad de un profundo río.

Arthur Cayley nació el 16 de agosto de 1821 en Richmond, Surrey, siendo el hijo segundo de una familia que residía temporalmente en Inglaterra. Por la parte del padre, la ascendencia de Cayley se remonta a los días de la conquista normanda (1066) y quizá antes, a la época de los barones de Normandía. La familia, como la familia Darwin, abunda en hombres de talento, que podrían proporcionar excelente material para los estudiosos de la herencia. Su madre, Marie Antonia Doughty, parece ser de origen ruso. El padre de Cayley fue un comerciante inglés dedicado al comercio con Rusia. Arthur nació durante una de las periódicas visitas de sus padres a Inglaterra. En 1829, cuando Arthur tenía ocho años, el comerciante se retiró a vivir en Inglaterra. Arthur fue enviado a una escuela privada en Blaekheath, y más tarde, teniendo 14 años, al King's College School de Londres. Su genio matemático se reveló muy precozmente. Las primeras manifestaciones de su talento superior fueron semejantes a las de Gauss. El joven Cayley demostró una asombrosa habilidad para los largos cálculos numéricos, que emprendía para divertirse. Al comenzar el estudio formal de la Matemática rápidamente superó al resto de sus compañeros. Puede decirse que constituyó entre ellos una categoría especial, lo mismo que ocurrió más tarde cuando llegó a la Universidad, estando de acuerdo sus maestros en que el muchacho era un matemático ingénito que debería elegir la Matemática como carrera. En contraste afortunado con los maestros de Galois, los de Cayley reconocieron su capacidad desde el principio y le alentaron. El comerciante retirado puso primeramente obstáculos a que su hijo fuera matemático, pero finalmente, convencido por el director de la Escuela, dio su consentimiento, su bendición y su dinero. Decidió enviar a su hijo a Cambridge.

Cayley comenzó su carrera universitaria, teniendo 17 años, en el Trinity College de Cambridge. Entre sus compañeros fue considerado como "un simple matemático" con una aguda pasión para la lectura de las novelas. Cayley fue, en efecto, durante toda su vida, un devoto del género novelesco algo altisonante, ahora considerado clásico, que entusiasmaba a los lectores de los años 1840 a 1850. Scott parece haber sido su favorito con Jane Austen en segundo termino; más tarde leyó a Thackeray, pero no le gustó. Difícilmente podía leer a Dickens. Los versos de Byron excitaban su admiración, aunque su gusto victoriano, algo puritano, se revelaba algunas veces, y no encontraba simpática la picaresca figura de Don Juan. Las representaciones de Shaskespeare, especialmente las comedias, le deleitaban. Como obras más sólidas y de más difícil digestión leyó la interminable *Historia de Grecia* de Grote y la retórica *Historia de Inglaterra,* de Macaulay. El griego, aprendido en la escuela, fue siempre para él un lenguaje de fácil lectura. Leía y escribía el francés tan fácilmente como el inglés, y su conocimiento del alemán y del italiano, le dieron la oportunidad de nuevas lecturas cuando agotó a los clásicos victorianos (o éstos le habían agotado a él). El género novelesco fue una de sus diversiones, las otras serán mencionadas más adelante.

Al terminar su tercer año en Cambridge, Cayley se había alejado ya tanto del resto de los compañeros en los estudios matemáticos que el profesor trazó una línea bajo su nombre, colocándolo al muchacho en una categoría especial "por encima del primero". En 1842, teniendo 21 años, Cayley fue *senior wrangler,* el primero de la escuela, en los concursos matemáticos, y al mismo tiempo fue colocado en primer término en la prueba aún más difícil para el premio Smith. Cayley se hallaba, pues, en condiciones de que se le permitiera hacer lo que quería durante algunos años. Fue elegido *compañero* del Trinity College y tutor ayudante por un período de tres años. Su nombramiento podía haber sido renovado de haber tomado las órdenes sagradas, pero Cayley, aunque era un ortodoxo de la iglesia anglicana, no podía resistir la idea de ser pastor para obtener un cargo o lograr otro mejor, como muchos hacían, sin que se perturbara su fe o su conciencia.

Sus deberes puede decirse que casi eran nulos. Tuvo algunos discípulos, pero no tan numerosos que le dificultaran su labor. Haciendo el mejor uso posible de su libertad, continuó las investigaciones matemáticas que había comenzado antes de poseer el título. Lo mismo que Abel, Galois y muchos otros, que alcanzaron gran altura en la Matemática, Cayley se dirigió a los maestros por su propia inspiración. Su primera obra, publicada en 1841, cuando tenía 20 años, surgió de su estudio de Lagrange y Laplace.

Sin otro quehacer que lo que deseaba realizar, Cayley publicó, después de obtener su título, ocho trabajos el primer año, cuatro el segundo y tres el tercero. Estos primeros trabajos fueron hechos cuando aun no tenía 25 años, y en el último se planea gran parte de la obra que iba a ocuparle durante los siguientes 50 años. Ya había comenzado el estudio de la Geometría de *n* dimensiones (que él creó), la teoría de invariantes, la Geometría enumerativa de curvas planas y su contribución esencial a la teoría de funciones elípticas.

Durante este período extraordinariamente fructífero no sintió la menor fatiga. En 1843, cuando tenía 22 años, y luego en otras ocasiones, mientras estuvo en Cambridge, se trasladó al continente, y dedicó sus vacaciones a escalar montañas, a hacer largas excursiones, y a pintar acuarelas. Aunque de apariencia débil y delicada, era vigoroso y recio, y muchas veces, después de toda una noche empleada en escalar alguna montaña, volvía al refugio a tomar su desayuno, dispuesto a dedicar algunas horas a sus Matemáticas. Durante su primer viaje visitó Suiza, haciendo excursiones por las montañas. Por entonces se desarrolló en él otra pasión, que duró toda su vida. Su descripción de la "extensión de las Matemáticas modernas", no es un simple ejercicio académico compuesto por un profesor que jamás ha ascendido a una montaña o contemplado amorosamente un bello paisaje, sino el símil exacto de un hombre que conoce la naturaleza íntimamente y de un modo directo.

Durante los últimos cuatro meses de sus primeras vacaciones en el extranjero visitó el norte de Italia. Entonces se iniciaron otras dos nuevas aficiones que habrían de solazarse para el resto de su vida: una comprensiva apreciación de la arquitectura, y un amor por la buena pintura. El mismo gustaba de pintar acuarelas, demostrando marcado talento. Con su amor a la buena literatura, a los viajes, a la pintura y a la arquitectura, y con su profunda comprensión de la belleza natural, se separa totalmente de ese sencillo matemático de la literatura convencional, descrito en su mayor parte por gentes que quizá conocieron algún pedante profesor de Matemática en un colegio, pero nunca vieron un verdadero matemático de carne y hueso.

En 1846, teniendo 25 años, Cayley abandonó Cambridge. No podía obtener ningún cargo como matemático a no ser que llegase a cuadrar su conciencia en la formalidad de las "órdenes sagradas". No hay duda de que para Cayley, como matemático, le hubiera sido más fácil "cuadrar el círculo". En consecuencia, abandonó Cambridge. La ley que, con el Servicio Civil de la India, ha absorbido en un tiempo u otro el capital intelectual más prometedor de Inglaterra, atraía ahora a Cayley. Es muy notable que muchos de los abogados y jueces que ocuparon los primeros puestos en Inglaterra durante el siglo XIX, fueran alumnos distinguidos en los concursos matemáticos de Cambridge, pero no hay que deducir, como algunos pretenden, que el aprendizaje matemático sea una buena preparación para las leyes. Pero en lo que no puede haber duda es que constituye una imbecilidad social colocar a un hombre joven de la talla matemática demostrada por Cayley, en la obligación de resolver pleitos y dedicarse a extender testamentos, transferencias y contratos.

Siguiendo la costumbre habitual de quienes en Inglaterra querían obtener, en la carrera de leyes, un grado distinguido (es decir, superior al cargo de procurador), Cayley ingresó en el Colegio de Lincoln, preparándose para la abogacía. Después de tres años de ser discípulo de un tal Mr. Christie, Cayley ingresó en la abogacía en 1849. Tenía 28 años. Al dedicarse a esa profesión, Cayley resolvió sabiamente que su cerebro no fuera invadido por las leyes, y en consecuencia rechazó más asuntos que los que aceptó. Durante 14 años mortales llevó una vida cómoda, aprovechándose de la oportunidad para obtener renombre y para ganar lo suficiente, pero no más que lo suficiente, para continuar su obra.

Su paciencia en los trabajos rutinarios y aburridos fue ejemplar, casi santa, y su reputación en la profesión aumentó continuamente. Se recuerda que su nombre se conserva en una de las obras de leyes relacionadas con un estudio importante que realizó. Pero es extraordinariamente satisfactorio recordar también que Cayley no era un santo, sino un ser humano normal, y en una ocasión llegó a perder la paciencia. Él y su amigo Sylvester discutían animadamente algún punto de la teoría de invariantes, en la oficina de Cayley, cuando penetró un ayudante, y puso en manos de Cayley un legajo de documentos para su examen. Repentinamente ese legajo le hizo descender a tierra desde las alturas donde se hallaba. La perspectiva de emplear varios días para encontrar algún mezquino recurso que beneficiara en algunas libras a algún opulento cliente, pletórico de dinero era ya demasiado para cualquier hombre que tuviera un buen cerebro en su cabeza. Con una exclamación de disgusto y un gesto de desprecio para aquella “vil suciedad” que tenía entre sus manos, arrojó el legajo al suelo y siguió hablando de Matemática. Este es el único caso que se recuerda en que Cayley perdió su paciencia. Cayley abandonó las leyes en la primera oportunidad, transcurridos 14 años. Pero durante su período de servidumbre publicó entre 200 y 300 trabajos matemáticos, muchos de los cuales se han hecho clásicos.

Como Sylvester apareció en la vida de Cayley durante la fase legal de éste, nos ocuparemos de él en este momento.

James Joseph, para darle el nombre impuesto al nacer, fue el más pequeño de varios hermanos y hermanas. Sus padres eran judíos y surgió a la vida en Londres el 3 de septiembre de 1814. Poco es lo que se sabe de su infancia, pues Sylvester fue poco comunicativo respecto a sus primeros años. Su hermano mayor emigró a los Estados Unidos, donde tomó el nombre de Sylvester, ejemplo seguido por toda la familia. Es un misterio el hecho de que un judío ortodoxo pudiera adornarse con un nombre favorito de los papas cristianos hostiles a los judíos. Posiblemente, el hermano mayor tenía cierto sentido humorístico. Desde entonces James Joseph, hijo de Abraham Joseph, fue para siempre James Joseph Sylvester.

Lo mismo que en el caso de Cayley, el genio matemático de Sylvester se demostró precozmente. Entre los seis y los catorce años asistió a escuelas privadas. En los últimos cinco meses, cuando tenía catorce años, estudió en la Universidad de Londres, dirigido por De Morgan. En un trabajo escrito, en 1840, con el título algo místico *Sobre la derivación de la coexistencia,* Sylvester dice: "Soy deudor de este término (recurrentes) al profesor De Morgan, de quien me jacto ser discípulo".

En 1829, teniendo 15 años, Sylvester ingresó en la Royal Institution de Liverpool, donde permaneció menos de dos años. Al final de su primer año obtuvo el premio en Matemática. Por esta época se hallaba a la cabeza de sus compañeros, siendo colocado en una categoría especial. Estando en la *Royal Institution* también obtuvo otro premio. Esto tiene particular interés, pues establece el primer contacto de Sylvester con los Estados Unidos de América, donde transcurrieron los más felices, y también algunos de los más tristes, días de su vida. El hermano americano, escribano de profesión, sugirió a los directores de las *Lotieries Contractors* de los Estados Unidos que sometieran un difícil problema, que les interesaba, al joven Sylvester. La solución matemática fue tan completa y prácticamente tan satisfactoria para los directores, que concedieron a Sylvester un premio de 500 dólares por su labor.

Los años en Liverpool no fueron en realidad felices. Siempre alegre y franco, Sylvester no estaba muy convencido de su fe judía, pero la proclamaba orgullosamente frente a la mezquina persecución de aquellos jóvenes bárbaros de la Institution que humorísticamente se llamaban a sí mismos cristianos. Pero existe un límite, y finalmente Sylvester huyó a Dublín con sólo algunas monedas en su bolsillo. Felizmente fue reconocido en la calle por un pariente lejano, que le aconsejó y pagó su viaje de vuelta a Liverpool.

Anotaremos aquí otra curiosa coincidencia: Dublín, o al menos uno de sus habitantes, prestó un tratamiento humano en su primera visita al refugiado de Liverpool; once años más tarde el *Trinity College* de Dublín le concedió los grados académicos de Bachiller y *Magister artium,* que su alma mater, la Universidad de Cambridge, le había negado. Por ser judío no podía suscribir aquella mezcla notable de argumentos sin sentido común conocida con el nombre de los Treinta y Nueve Artículos prescritos por la Iglesia Anglicana como el mínimum de creencias religiosas que podía permitirse a una mente racional. Sin embargo, cuando la educación superior inglesa pudo desprenderse, en 1871, de la mano muerta de la iglesia, Sylvester recibió inmediatamente su título *honoris causa.* Haremos notar que en esta como en otras dificultades de su vida, Sylvester no fue un humilde mártir que prolongara sus sufrimientos. Estaba lleno de vigor y coraje, tanto física como moralmente, sabía luchar para que se le otorgara justicia, y frecuentemente lo hizo. Fue, en efecto, un luchador innato con el valor indomable de un león.

En 1831, teniendo 17 años, Sylvester ingresó en el St. John Collego de Cambridge. Debido a varias enfermedades su carrera universitaria fue interrumpida, y no intervino en los concursos matemáticos hasta 1837, ocupando el segundo lugar. Jamás volvió a hablarse del compañero que le venció. Por no ser cristiano, Sylvester no pudo aspirar a los premios Smith.

En la amplitud de sus inquietudes intelectuales Sylvester se parece a Cayley. Físicamente, los dos hombres no tenían parecido alguno. Cayley, aunque fuerte y con gran resistencia física, como hemos visto, era en apariencia débil, y sus maneras eran tímidas y discretas. Sylvester, bajo y macizo con una magnífica cabeza que se alzaba sobre sus hombros, daba la impresión de un tremendo vigor y vitalidad, y en efecto los tenía. Uno de sus discípulos decía que podía haber posado para el retrato de Hereward el Wake, en la novela de Charles Kingsley del mismo nombre. En sus inquietudes fuera de la Matemática, Sylvester era mucho menos limitado y mucho más liberal que Cayley. Su conocimiento de los clásicos griegos y latinos en el idioma original era amplio y exacto, y durante largo tiempo constituyeron sus lecturas. Muchos de sus trabajos están ilustrados por citas de estos clásicos. Las citas son siempre perfectamente apropiadas y realmente aclaran la cuestión.

Lo mismo puede decirse de sus alusiones de otras literaturas. Puede ser de interés para cualquier literato examinar los cuatro volúmenes de sus *Mathematical Papers* y reconstruir así el amplio campo de las lecturas de Sylvester basándose en las citas mencionadas y en otras fases curiosas, de las que no se hacen referencias explícitas. Además del inglés y de la literatura griega y latina, conocía la literatura francesa, alemana e italiana en los idiomas originales. Su interés por los idiomas y por la forma literaria era agudo y penetrante. A él se le debe la mayor parte de la terminología gráfica de la teoría de invariantes. Comentando los numerosos nuevos términos matemáticos que inventó basándose en el griego y el latín, Sylvester se refiere a sí mismo con el nombre del "Adán matemático".

Es muy posible que de no haber sido un gran matemático podría haber logrado ser un poeta más que pasable. El verso y las "leyes" de su construcción le fascinaron toda su vida. Compuso muchas poesías (algunas de las cuales se han publicado), algunas de ellas en forma de soneto. El tema de sus composiciones quizá puede despertar en algunos casos una sonrisa, pero Sylvester demuestra con frecuencia su comprensión de lo que es la poesía. Otro, aspecto de su faz artística es la música, de la que era un bien aficionado. Se dice que Gounod le dio lecciones de canto, y con frecuencia pudo lucir su voz en las reuniones. Estaba más orgulloso de su "do de pecho" que de sus invariantes.

Una de las más notables diferencias entre Cayley y Sylvester puede ser mencionada en este lugar: Cayley era un lector omnívoro de la obra de otros matemáticos; Sylvester encontraba un intolerable fastidio en el intento de comprender lo que otros habían hecho. Una vez, en su vida ulterior, encargó a un joven matemático que le enseñara algo acerca de las funciones elípticas, pues deseaba aplicarlas a la teoría de números (en particular a la teoría de las particiones, que se ocupa del número de formas en que puede ser construido un número dado sumando números de un determinado tipo, todos impares o algunos impares y algunos pares). Después de la tercera lección, Sylvester abandonó su intento, y se dedicó a comunicar al joven sus últimos descubrimientos en Álgebra. Pero Cayley parecía conocer todas las cosas, hasta los temas en que rara vez había trabajado, y su consejo como juez fue buscado por autores y editores de toda Europa. Cayley jamás olvidó lo que había visto alguna vez; Sylvester tenía dificultades para recordar sus propias invenciones, y una vez discutió acerca de si era posible que fuera cierto un teorema por él planteado. Cosas relativamente poco importantes, que todo matemático conoce, eran para Sylvester fuentes de perpetua admiración. Como una consecuencia de esto, cualquier campo de la Matemática ofrecía un mundo encantador de descubrimientos para Sylvester, mientras Cayley contemplaba serenamente lo que ante él se hallaba, veía lo que deseaba, lo incorporaba a sus conocimientos y seguía trabajando.

En 1838, teniendo 24 años, Sylvester obtuvo su primer cargo, el de profesor de filosofía natural (ciencia en general, física en particular), en la University College, de Londres, donde su antiguo maestro De Morgan era uno de sus colegas. Aunque estudió química en Cambridge, y durante toda su vida conservó su interés por estos estudios, poco le placía a Sylvester la enseñanza de la ciencia, y después de dos años abandonó el cargo. Mientras tanto fue elegido miembro de la *Royal Society,* a la desusada edad de 25 años. Los méritos matemáticos de Sylvester eran tan notables que tenían que ser reconocidos, pero no le ayudaban para obtener una posición satisfactoria.

En este punto de su carrera Sylvester vivió una de las desventuras más singulares de su vida. Puede considerarse inocente, cómica o trágica, según como se mire. Lleno de entusiasmo y pletórico de optimismo Sylvester cruzó el Atlántico para ser profesor de Matemática en la Universidad de Virginia, en 1841, el año en que Boole publicó su descubrimiento de los invariantes.

Sylvester permaneció tan sólo tres meses en la Universidad. La negativa de las autoridades universitarias para castigar a un joven que le había insultado, fue la causa de que el profesor dimitiera. Pasado un año de esta desastrosa experiencia, Sylvester intentó vanamente obtener un cargo satisfactorio, solicitando sin resultado un puesto en las Universidades de Harvard y de Columbia. Al fracasar volvió a Inglaterra.

Sus experiencias en América le hicieron abandonar la enseñanza durante los siguientes diez años. Al volver a Londres fue activo actuario de una compañía de seguros de vida. Tal obra para un matemático creador es una droga venenosa, y Sylvester casi dejó de ser matemático. Sin embargo, tuvo algunos discípulos privados, y el nombre de uno de ellos ha sido conocido y reverenciado en todos los países del mundo actual. Era a principios del año 1850, la época en que las mujeres tan sólo se ocupaban de sus afeites y de las obras de beneficencia. Es, pues, sorprendente encontrar que el discípulo más distinguido de Sylvester fuera una joven, Florence Nightingale, el primer ser humano que impuso decencia y limpieza en los hospitales militares, a pesar de las vivas protestas de la tozuda oficialidad. En aquella época Sylvester tenía cerca de 40 años, y la señorita Nightingale seis años menos que su maestro. Sylvester pudo escapar de su provisional forma de ganarse la vida en el mismo año (1854) en que miss Nightingale marchó a la guerra de Crimea.

Pero antes Sylvester había dado otro paso en falso, que no le llevó a parte alguna. En 1846, a la edad de 32 años, ingresó en el Temple (donde modestamente se refiere a sí mismo considerándose como "una paloma anidando entre gavilanes"), para preparar su carrera de leyes, y en 1850 ingresó en la abogacía. Así llegaron a encontrarse él y Cayley. Cayley tenía 29 años, Sylvester 36, y ambos se hallaban apartados de las tareas a que la naturaleza les había llamado. Pronunciando conferencias en Oxford 35 años más tarde, Sylvester rindió tributo a su amigo: "Cayley, aunque más joven que yo, es mi progenitor espiritual, que por primera vez abrió mis ojos para que pudiera ver y admirar los elevados misterios de nuestra común fe matemática". En 1852, poco después de que su amistad se iniciara, Sylvester se refiere a "Mr. Cayley, en cuyos discursos abundan las perlas y rubíes". Mr. Cayley, por su parte, menciona frecuentemente a Mr. Sylvester, pero siempre fríamente. La primera explosión de gratitud de Sylvester en letra impresa tiene lugar en un trabajo de 1851, donde dice: "El teorema antes enunciado (la relación entre los determinantes menores de las formas cuadráticas equivalentes linealmente fue en parte sugerido en el curso de una conversación con Mr. Cayley (a quien le soy deudor de haber vuelto a gozar de la vida matemática)..."

Sylvester quizá exageró, pero hay cierta verdad en lo que dijo. Si no es exacto que resucitara a un muerto, le concedió, al menos, un nuevo par de pulmones. Desde el momento en que conoció a Cayley respiró y vivió la Matemática hasta el fin de sus días. Los dos amigos solían pasear por las salas del colegio de Lincoln discutiendo la teoría de invariantes, que ambos estaban creando, y más tarde, cuando Sylvester se alejó, continuaron a distancia sus conversaciones matemáticas. Ambos eran solteros en aquella época.

La teoría de invariantes algebraicos de la cual se han desarrollado, naturalmente, las diversas ampliaciones del concepto de invariancia, se originó en una observación extraordinariamente sencilla. Como haremos notar en el capítulo sobre Boole, el primer destello de la idea aparece en Lagrange, y desde allí pasó a las obras aritméticas de Gauss. Pero ninguno de estos hombres se dio cuenta de que el sencillo, pero notable fenómeno algebraico que tenían ante ellos, era el germen de una vasta teoría. Tampoco Boole parece haberse dado cuenta completa de lo que encontró al estudiar y extender notablemente la obra de Lagrange. Salvo en una ocasión, Sylvester fue siempre justo y generoso para Boole en las cuestiones de prioridad, y Cayley, como es natural, fue siempre noble.

La simple observación antes mencionada puede ser comprendida por quien alguna vez haya resuelto una ecuación cuadrática, y es sencillamente ésta. La condición necesaria y suficiente de que la ecuación

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

tenga dos raíces iguales es que

$$b^2 - ac = 0.$$

Reemplacemos ahora la variable x por su valor en función de y obtenido por la transformación

$$y = (px + q)/(rx + s).$$

Así x queda sustituida por el resultado de despejar esta x, o sea

$$x = (q - sy)I(ry - p),$$

con lo cual la ecuación dada se transforma en otra en y; es decir, la nueva ecuación es

$$Ay^2 + 2By + C = 0.$$

Realizando las operaciones encontramos que los nuevos coeficientes A, B, C se expresan en función de los coeficientes primitivos a, b, c, como sigue:

$$A = as^2 - 2bsr + cr^2$$
$$B = - aqs + b(qr + sp) - cpr,$$
$$C = aq^2 - 2bpq + cp^2,$$

y ya es fácil demostrar (por simples reducciones si es necesario, aunque hay una forma más sencilla de razonar el resultado sin realmente calcular A, B, C) que

$$B^2 - AC = (ps - qr)^2 \times (b^2 - ac).$$

Ahora, $b^2 - ac$ se llama el discriminante de la ecuación cuadrática en *x;* de aquí, el discriminante de la cuadrática en *y* es $B^2 - AC$ *y* se ha demostrado que el *discriminante de* la ecuación *transformada es* igual al discriminante *de* la ecuación original, *multiplicado por el factor* $(ps - qr)^2$ *que depende sólo de los coeficientes p, q, r, s* en la transformación $y = (px + q)/(rx + s)$ *por medio de* la cual *x venía expresada en* función *de y.*
Boole fue el primero (en 1841) que observó algo digno de nota en esta al parecer insignificante particularidad. Toda ecuación algebraica tiene un discriminante, es decir, cierta expresión (como $b^2 - ac$ para la cuadrática) que es igual a cero si dos o más raíces de la ecuación son iguales y sólo en este caso. Boole se preguntó en primer término: ¿permanece invariable el discriminante de cualquier ecuación cuando su *x* es reemplazada por su afín *y* (como se hizo para la cuadrática) salvo un factor que depende únicamente de los coeficientes de la transformada? Encontró que esto era exacto. Luego se preguntó si no habría otras expresiones, aparte de los discriminantes construidos basándose en los coeficientes, que tuvieran esta misma propiedad de *invariabilidad* después de la transformación. Encontró dos para la ecuación general de cuarto grado. Luego, otro hombre, el brillante matemático alemán F. M. G. Eisenstein (1823-1852), siguiendo el método de Boole, en 1844, descubrió que ciertas expresiones que abarcan tanto *los coeficientes como la x* de las ecuaciones originales muestran el mismo tipo de invariabilidad: los coeficientes originales y la *x* original se transfieren en los coeficientes transformados y en *y* (como para la cuadrática), y las expresiones en cuestión construidas basándose en las originales difieren de las construidas basándose en las transformadas tan sólo por un factor, que depende únicamente de los coeficientes de la transformada.
Ni Boole ni Eisenstein tenían un método general para encontrar tales expresiones invariantes. En este momento intervino Cayley (1845), con su memoria que abre nuevas rutas Sobre *la teoría de las transformaciones lineales.* A la sazón tenía 24 años. Se plantea el problema de encontrar métodos uniformes que proporcionen todas las expresiones invariantes del tipo descrito. Para evitar largas explicaciones el problema ha sido planteado en términos de ecuaciones; en realidad fue abordado de otro modo, pero éste no tiene importancia aquí.
Como la cuestión de la invariancia es fundamental en el pensamiento científico moderno, mencionaremos tres nuevos ejemplos para expresar lo que significa, ninguno de los cuales implica símbolos u operaciones algebraicas. Imaginemos una figura compuesta de líneas rectas y curvas que se cortan, trazadas sobre una hoja de papel. Arrugar el papel de cualquier modo, sin que se rasgue, e intentar pensar cuál es la propiedad más manifiesta de la figura, que es la misma antes y después de arrugar el papel. Hacer lo mismo para cualquier figura dibujada en una lámina de caucho, estirando, pero no desgarrando el caucho, en la forma en que se nos antoje. En este caso es indudable que los tamaños de las áreas y de los ángulos y las longitudes de las líneas no permanecen "invariantes". Estirando adecuadamente el caucho, las líneas rectas pueden haberse deformado constituyendo curvas o líneas tan tortuosas como queramos, y al mismo tiempo las curvas originales, o al menos algunas de ellas, pueden haberse convertido en líneas rectas. Sin embargo, algo en toda la figura ha permanecido invariable, y cuya simplicidad puede ser causa de que pase inadvertido el orden de los puntos sobre cualquiera de las líneas de la figura que marcan los lugares donde otras líneas cortan determinada línea. Por tanto, si movemos el lápiz a lo largo de una línea determinada desde *A* a *C,* y tenemos que pasar por el punto *B* de la línea antes de que la figura sea deformada, tendremos que pasar por *B* al pasar de *A* a *C* después de la deformación. El orden (como se ha dicho) es un invariante respecto de las transformaciones particulares originadas al arrugar el papel para formar una bolita o al estirar la lámina de caucho.

Este ejemplo podrá parecer superficial, pero quien haya leído una descripción no matemática de las intersecciones de las "líneas del mundo" en la relatividad general, y quien recuerde que una intersección de esas dos líneas marca un punto-suceso comprenderá que lo que estamos discutiendo es de la misma categoría que cualquiera de nuestras descripciones del universo físico. La maquinaria matemática suficientemente poderosa para tratar tales "transformaciones" complicadas y realmente producir los invariantes fue la creación de muchos investigadores incluyendo a Riemann, Christoffel, Ricci, Levi-Civita, Lie y Einstein, nombres todos bien conocidos de los lectores de las descripciones vulgarizadoras de la relatividad. Todo el vasto programa se originó por los primeros trabajos en la teoría de invariantes algebraicos, de la cual Cayley y Sylvester fueron los verdaderos fundadores.

Como segundo ejemplo imaginemos que se hace una lazada en una cuerda cuyos extremos están unidos entre sí. Desplazando la lazada a lo largo de la cuerda podemos deformarlas en cierto número de formas. ¿Qué permanece "invariante", qué se "conserva", después de todas estas deformaciones, que en este caso son nuestras transformaciones? Sin duda, el tamaño de la lazada ni la forma son invariantes. Pero el tipo de la lazada es invariante; en un sentido que no necesita ser explicado es el único tipo de lazada siempre que no desatemos los extremos de la cuerda. Además, en la física más antigua, la energía era "conservada"; la cantidad total de energía del Universo era considerada como un invariante, la misma bajo todas las transformaciones desde una forma, tal como la energía eléctrica, en otras, como el calor y la luz.

Nuestro tercer ejemplo de invariabilidad apenas es otra cosa que una alusión a la ciencia física. Un observador fija su "posición" en el espacio y tiempo con referencia a tres ejes perpendiculares entre sí y a un reloj que está andando. Otro observador, que se mueve relativamente al primero, desea describir el mismo suceso físico que el primero describe. También tiene su sistema de referencia espacio-tiempo; su movimiento relativamente al primer observador puede ser expresado como una transformación de sus propias coordenadas (o de las del otro observador). Las descripciones hechas por los dos pueden o no diferir en la forma matemática, según cual sea el tipo particular de transformación. Si sus descripciones difieren, la diferencia no es, como se comprende, inherente al suceso físico que ambos observan, sino a su sistema de referencia y a la transformación. Se plantea entonces el problema de formular sólo aquellas expresiones matemáticas de fenómenos naturales que sean independientes, matemáticamente, de cualquier sistema de referencia particular, y por tanto, son expresados por todos los observadores en la misma forma. Esto equivale a encontrar los invariantes de la transformación que expresan el desplazamiento más general en el "espacio-tiempo" de un sistema de referencia con respecto a cualquier otro. Así, el problema de hallar las expresiones matemáticas para las leyes intrínsecas de la naturaleza es reemplazado por otro abordable en la teoría de invariantes. Nuevos detalles serán añadidos cuando nos ocupemos de Riemann.

En 1863 la Universidad de Cambridge fundó una nueva cátedra de Matemática y le ofreció el puesto a Cayley, quien aceptó inmediatamente. El mismo año, teniendo 42, se casó con Susan Moline. Aunque ganó menos dinero como profesor de Matemática que había ganado en las leyes, Cayley no lamentó el cambio. Algunos años más tarde la Universidad fue reorganizada, y el sueldo de Cayley fue aumentado. Sus deberes también aumentaron desde explicar un curso de lecciones a explicar dos. Su vida estaba ahora dedicada casi completamente a la investigación matemática y a la administración de la Universidad. En esta última tarea, su sólido conocimiento de los negocios, su juicio desinteresado y su experiencia de las leyes fueron insustituibles. Jamás habló en demasía, pero lo que dijo fue ordinariamente aceptado como juicio definitivo, y jamás daba una opinión sin haber meditado detenidamente. Su matrimonio y su vida de hogar fueron felices; tuvo dos hijos, un hijo y una hija. Al pasar los años, su mente permaneció tan vigorosa como cuando era joven, y su carácter se hizo más amable, si esto era posible. En su presencia jamás podía emitirse un juicio excesivamente duro sin provocar su protesta. Para los hombres jóvenes y para los que se iniciaban en la carrera matemática, tuvo siempre una ayuda generosa y un sólido consejo.

Durante la época en que desempeñó la cátedra, la educación superior de las mujeres era una cuestión cálidamente debatida. Cayley puso en juego toda su tranquila y persuasiva influencia en su favor, y gracias a sus esfuerzos las mujeres fueron finalmente admitidas a los estudios en el aislamiento monacal de la medieval ciudad de Cambridge.

Mientras Cayley continuaba sus trabajos matemáticos en Cambridge, su amigo Sylvester continuaba combatiendo contra su mundo. Sylvester jamás se casó. En 1854, teniendo 40 años, se presentó a la cátedra de Matemática en la Real Academia Militar de Woolwich. No la obtuvo. Tampoco logró otro cargo al que aspiró en el Gresbam College de Londres. Su breve conferencia como candidato fue demasiado buena para la junta de gobierno. Sin embargo, el candidato triunfante en Woolwich murió al año siguiente, y Sylvester fue nombrado. Entre sus no demasiados generosos emolumentos se contaba el derecho de pastoreo. Como Sylvester no tenía caballos, ni vacas ni ovejas, y él, por su parte, no comía hierba, es difícil apreciar que beneficios particulares podría obtener de esta inestimable generosidad.

Sylvester mantuvo su cargo en Woolwich durante 16 años, hasta que fue forzosamente "jubilado" en 1870, teniendo 56 años. Se hallaba aún lleno de vigor, pero nada pudo hacer contra los funcionarios oficiales que conspiraban contra él. Gran parte de su labor quedaba aún para el futuro, pero sus superiores consideraron que un hombre de su edad debía ser jubilado.

Otro aspecto de su forzado retiro despertó todos sus instintos combativos. Para completar el plan, las autoridades intentaron hurtar a Sylvester parte de la pensión que le pertenecía legítimamente. Sylvester no lo consintió. Muy a pesar suyo, los estafadores comprendieron que no se trataba de un viejo y dócil profesor, sino de un hombre que podía darles su merecido. Al fin le fue concedida la pensión que le correspondía.

Aunque en las cuestiones materiales abundaron los sucesos desagradables, Sylvester no podía quejarse de los reconocimientos que mereció su obra científica. Numerosos fueron los honores recibidos; entre ellos uno de los más preciados por los hombres de ciencia: el título de miembro extranjero correspondiente de la Academia Francesa de Ciencias, Sylvester fue elegido en 1863 para la vacante de la sección de Geometría causada por la muerte de Steiner.

Después de su jubilación, Sylvester vivió en Londres, versificando, leyendo los clásicos, jugando al ajedrez y trabajando, aunque no mucho, en los problemas matemáticos. En 1870 publicó su folleto *Las leyes del verso.* Poco después teniendo 62 años, volvió repentinamente a la vida matemática. El anciano era inagotable.

La *Johns Hopkins University* había sido fundada en Baltimore en 1875, bajo la brillante dirección del presidente Gilman. Alguien aconsejó a Gilman que comenzara a formar el núcleo de su facultad con un notable erudito de las lenguas clásicas y con el mejor matemático que se pudiera encontrar. Todo lo demás vendría luego, y así ocurrió. Sylvester tuvo al fin un cargo donde prácticamente pudo hacer lo que quiso, empezando por hacerse justicia. En 1876, cruzó nuevamente el Atlántico, y tomó posesión de su cátedra en la *Johns Hopkins University.* Su sueldo era generoso para aquellos días, cinco mil dólares al año. Al aceptar el cargo Sylvester hizo una curiosa estipulación: Su sueldo debía ser "pagado en oro". Quizá pensara en Woolwich, donde le pagaban el equivalente de 2750 dólares más el pastoreo.

Los años desde 1876 a 1883, transcurridos en dicha Universidad, fueron probablemente los más felices y los más tranquilos que Sylvester tuvo. Aunque ya no tenía que "combatir contra el mundo", no se durmió sobre sus laureles. Parecía que se había despojado de cuarenta años, *y* se hallaba más vigoroso que nunca, lleno de entusiasmo y repleto de nuevas ideas. Estaba profundamente agradecido por la oportunidad que le había dado la *Johns Hopkins University* para iniciar su segunda carrera matemática cuando tenía 63 años, y no fue remiso para expresar su gratitud públicamente en el discurso pronunciado en la fiesta del Día de la Conmemoración del año 1877.

En este discurso bosqueja lo que pensaba hacer (y lo hizo) en sus lecciones e investigaciones. "Existen las llamadas formas algebraicas. El profesor Cayley las llama cuánticas [ejemplos: $ax^2 + 2bxy + Cy^2$, $ax^3 + 3bx2y + 3cxy + dy^3$; *los coeficientes numéricos* 1, 2, 1 en la primera, 1, 3, 3, 1 en la segunda, son coeficientes binómicos, como en la tercera y cuartas líneas del triángulo de Pascal (capítulo 5). La siguiente en orden será $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$]. No son propiamente hablando formas geométricas, aunque se pueda, en cierto grado, incluirlas en ellas. Son más bien bosquejos de procesos o de operaciones para formar, para traer a la existencia, podríamos decir, cantidades algebraicas.

“A toda cuántica se asocia una infinita variedad de otras formas que pueden considerarse como engendradas por ella, y flotando como una atmósfera alrededor de ella; pero por infinitas que sean esas existencias derivadas, esas emanaciones de la forma progenitora, se observa que pueden ser obtenidas por composición, por mezcla, de cierto número limitado de formas fundamentales, rayos *standard* como podrían ser denominados en el espectro algebraico de la cuántica a la que pertenecen. Y de igual modo que es labor de los físicos actuales [1877 e inclusive hoy] determinar las líneas fijas en el espectro de cualquier sustancia química, así también la meta y objetivo de una gran escuela de matemáticos es establecer las formas derivadas fundamentales, los *covariantes* [ese tipo de expresión "invariante" ya descrita que abarca tanto las variables como los coeficientes de la forma o cuántica], y los invariantes, como se denominan, de esas cuánticas".

Los lectores matemáticos comprenderán fácilmente que Sylvester hace aquí una analogía muy bella para el sistema fundamental y las sicigias para una forma dada; el lector no matemático debe volver a leer el párrafo para captar el espíritu del Álgebra de que habla Sylvester, pues la analogía es realmente obscura.

En un pie de página Sylvester hace notar: "Tengo al presente una clase de ocho a diez estudiantes que escuchan mis conferencias sobre el Álgebra superior moderna. Uno de ellos, un joven ingeniero entregado a los deberes de su cargo desde las ocho de la mañana hasta las seis de la tarde con un intervalo de una hora y media para comer o hacer visitas, me ha proporcionado la mejor prueba, y la mejor expresada que yo he visto hasta ahora, de lo que llamo [un cierto teorema]...... El entusiasmo de Sylvester, había ya cumplido los sesenta años, era el de un profeta que inspira a los demás a ver la tierra prometida que ha descubierto o que está por descubrir. Enseñaba allí lo mejor que podía, y en la única forma en que puede cumplirse la enseñanza superior.

Tenía siempre algo amable que decir (en los pies de página) acerca del país de adopción: "...Creo que no hay nación en el mundo donde la capacidad cuente tanto, y la simple posesión de la riqueza (a pesar de todo lo que se dice del dólar todopoderoso) cuente tan poco como en América...”

También hace referencia a cómo sus dormidos instintos matemáticos recuperaron la completa capacidad creadora. "Sin la insistencia de un estudiante de esta Universidad [Johns Hopkins] expresándome su deseo de estudiar conmigo el álgebra moderna, jamás se hubiera llevado a cabo esta investigación... Con absoluto respeto, pero con una invencible tenacidad insistía sobre este punto. Quería conocer la nueva Álgebra (los cielos sabrán dónde oyó hablar de ella, pues era casi desconocida en este continente). Me vi obligado a actuar ¿y cuál fue la consecuencia? Intentando aclarar una explicación oscura de nuestros libros, mi cerebro se iluminó; me entregué con renovado celo a un tema que había abandonado durante años y encontré ocasión para que surgieran pensamientos que habían atraído mi atención durante épocas pasadas y que probablemente ocuparán durante varios meses futuros mi capacidad de observación".

Todos los discursos o trabajos de Sylvester contienen muchas cosas que merecen mención en la Matemática, aparte de los tecnicismos. Podría reunirse, hojeando las páginas de sus obras completas, una excelente antología para principiantes, y quizá también para matemáticos maduros. Probablemente ningún otro matemático ha revelado de un modo tan transparente su personalidad a través de sus escritos como lo hizo Sylvester. Le gustaba reunir muchas personas para transmitirles su entusiasmo contagioso por la Matemática. Decía con razón que “en tanto que el hombre continúa siendo un ser gregario y sociable no puede abstenerse de satisfacer el instinto de compartir lo que ha aprendido, de comunicar a los demás las ideas e impresiones que bullen en su cerebro, y si no lo hace, su naturaleza moral se embotará y se atrofiará, y se secarán las fuentes más seguras de su futura provisión intelectual".

Al lado de la descripción de Cayley acerca de la extensión de la moderna Matemática podemos colocar la de Sylvester. "Me apesadumbra pensar que he estado alejado largo tiempo de un campo tan vasto como el ocupado por la matemática moderna. La Matemática no es un libro limitado por unas tapas entre broches de bronce, cuyo contenido sólo exige paciencia para ser descubierto, no es una mina cuyos tesoros pueden exigir largo tiempo para lograrlos, pero que tan sólo constituyen un número limitado de venas y filones; no es un terreno cuya fecundidad pueda agotarse por la obtención de sucesivas cosechas; no es un continente o un océano del que se puedan trazar mapas y limitar sus contornos; es ilimitada, y todo espacio es demasiado estrecho para sus aspiraciones; sus posibilidades son tan infinitas como los mundos que se multiplican cada vez más ante la mirada del astrónomo; es algo incapaz de ser encerrado dentro de determinados límites o reducido a definiciones de validez permanente, como la conciencia, la vida, que parece dormitar en cada mónada, en cada átomo de materia, en cada hoja, en cada célula, siempre dispuesta a engendrar nuevas formas de existencia vegetal y animal".

En 1878 fue fundado por Sylvester el *American Journal of Mathematics*, publicado bajo su dirección por la *Johns Hopkins University*.

El *Journal* dio a la Matemática de los Estados Unidos un tremendo impulso en la dirección adecuada, la investigación. En la actualidad aun da sus frutos matemáticos, pero con dificultades económicas.

Dos años más tarde tuvo lugar uno de los clásicos incidentes en la carrera de Sylvester. Lo narraremos con las palabras del Dr. Fabián Franklin, sucesor de Sylvester en la cátedra de Matemática en la *Johns Hopkins University* algunos años después, y más tarde editor de la American de Baltimore, quien fue testigo ocular (y auditivo).

"Sylvester hizo algunas excelentes traducciones de Horacio y de los poetas alemanes, aparte de escribir cierto número de poesías originales. Los *tours de force* de la rima que realizó estando en Baltimore le sirvieron para ilustrar las teorías sobre la versificación, de las que proporciona ejemplos en su pequeño libro titulado *"Las leyes del verso"*. La lectura del poema Rosalinda en el *Peabody Institute* dio lugar a una muestra muy cómica de su capacidad para abstraerse. El poema consistía en no menos de cuatrocientos versos que rimaban todos con el nombre Rosalinda. El público llenaba la sala esperando divertirse siendo testigo de este experimento poético único en su clase. Pero el profesor Sylvester había creído necesario escribir gran número de notas explicativas, y anunció, que, para no interrumpir el poema, leería todas las notas al principio. Su lectura le sugirió algunas nuevas observaciones improvisadas, y Sylvester estaba tan interesado en su discurso que no se dio cuenta de que el tiempo pasaba y que el público se fatigaba, Cuando terminó la última de las notas miró el reloj y quedó horrorizado al observar que habla empleado hora y media, y aun no había comenzado a leer el poema que el auditorio deseaba escuchar. El asombro que se pintó en su rostro encontró eco en la explosión de una carcajada por parte del público, y entonces, después de comunicar a sus oyentes que se hallaban en perfecta libertad de salir de la sala si tenían otras ocupaciones, leyó el poema Rosalinda".

Las palabras del Doctor Franklin acerca de su maestro lo retratan admirablemente. "Sylvester era un hombre violento e impaciente, pero generoso, caritativo y de corazón tierno. Apreciaba siempre en grado extraordinario la obra de los demás, y tenía la acogida más cálida para todas las muestras de capacidad o de talento de sus discípulos. Era capaz de responder con violencia a la más leve provocación, pero no albergaba resentimiento alguno y estaba siempre dispuesto a olvidar la causa de la querella a la primera oportunidad".

Antes de seguir el hilo de la vida de Cayley donde se cruza nuevamente con la de Sylvester, dejaremos al autor de *Rosalinda* describir como hizo uno de sus más bellos descubrimientos, lo que ahora se llama "formas canónicas", esto significa simplemente la reducción de un "cuántico determinado" a una forma "standard". Por ejemplo $ax^2 + 2bxy + cy^2$ puede ser expresado como la suma de dos cuadrados, o sea $X^2 + Y^2$; $ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5$ puede ser expresada como una suma de tres quintas potencias, $X^5 + Y^5 + Z^5$.)

"He descubierto y desarrollado toda la teoría de las formas binarias canónicas para grados impares, y, por lo que parece, para los grados pares[1], en una sesión, bebiendo vino de Oporto para sostener las energías debilitadas, llevada a cabo a costa de torturar el pensamiento, de congestionar el cerebro y de tener la sensación de haber introducido los pies en un cubo de hielo. *Esa noche no* dormimos más". Los especialistas aceptan que los síntomas son inconfundibles. Pero debe haber sido un excelente oporto, a juzgar por lo que Sylvester obtuvo de su trasiego.

Cayley y Sylvester volvieron a encontrarse cuando aquél aceptó una invitación para dar conferencias en la *Johns Hopkins University*, durante un curso de seis meses en 1881 -1882. Eligió como tema las funciones abelianas, en las que estaba trabajando a la sazón, y Sylvester, que tenía 67 años, asistió fielmente a todas las lecciones de su famoso amigo. Sylvester realizó aún una fecunda labor durante varios años, y Cayley durante un plazo menor.

Describiremos ahora brevemente tres de las más notables contribuciones de Cayley a la Matemática, aparte de su labor sobre la teoría de invariantes algebraicos. Ya hemos dicho que inventó la teoría de matrices, la Geometría del espacio de *n* dimensiones, y que una de sus ideas geométricas arrojó nueva luz (en manos de Klein) sobre la Geometría no euclidiana. Comenzaremos con lo último por ser lo más difícil de comprender.

Desargues, Pascal, Poncelet y otros autores han creado la Geometría *proyectiva* (véase capítulos 5, 13) cuyo objeto es descubrir las propiedades de las figuras que son invariantes en proyección. Mediciones, tamaños de ángulos, longitudes de líneas y los teoremas que dependen de las mediciones, por ejemplo la proposición pitagórica de que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, no son proyectivas sino métricas, y no deben ser tratadas por la Geometría proyectiva ordinaria. Uno de los grandes descubrimientos de Cayley en Geometría fue pasar la barrera que se alzaba ante él, y que separaba las propiedades proyectivas de las propiedades métricas de las figuras. Desde su punto de vista, la Geometría métrica también resalta proyectiva, y el gran poder y flexibilidad de los métodos proyectivos fueron aplicables por la introducción de elementos imaginarios (por ejemplo, puntos cuyas coordenadas implican $\sqrt{-1}$) a las propiedades métricas. Quien haya

[1] Esta parte de la teoría fue desarrollada muchos años más tarde por E. K. Wakeford (1894-1916), quien perdió su vida en la primera Guerra Mundial. "Gracias sean dadas a Dios que nos iguala en esta hora". (Rupert Brooke).

estudiado Geometría analítica recordará que dos círculos se cortan en cuatro puntos, dos de los cuales son siempre imaginarios (existen casos de aparente excepción, por ejemplo los círculos concéntricos, pero esto poco importa para nuestro propósito). Los conceptos fundamentales en Geometría métrica son la distancia entre dos puntos y el ángulo de dos líneas. Reemplazando el concepto de distancia por otro, que también implica elementos "imaginarios", Cayley proporcionó los medios para unificar la Geometría euclidiana y las Geometrías no euclidianas comunes en una teoría comprensiva. Sin el uso de algún tipo de Álgebra no es posible hacer una exposición inteligible de cómo puede lograrse esto. Para nuestro propósito es suficiente recordar el principal descubrimiento de Cayley de unir la Geometría proyectiva y métrica, y conseguir la unificación de las otras Geometrías mencionadas.

La cuestión de la Geometría de *n* dimensiones cuando Cayley la planteó era mucho más misteriosa de lo que nos parece actualmente, habituados como estamos al caso especial de cuatro dimensiones (espacio-tiempo) en la relatividad. Aun suele decirse que una Geometría de cuatro dimensiones es inconcebible para los seres humanos. Esto es una superstición explotada hace largo tiempo por Plücker; es fácil trazar figuras de cuatro dimensiones sobre una hoja de papel, y por lo que se refiere a la Geometría, el conjunto de un "espacio" de cuatro dimensiones puede ser fácilmente imaginado. Consideremos, en primer término, en un espacio tridimensional que no esté sujeto a reglas, *todos los círculos* que pueden ser trazados en un plano. Este *"todo"* es un "espacio" de tres dimensiones, por la simple razón de que emplea precisamente *tres* núme*ros o tres coordenadas* para individualizar uno cualquiera del enjambre de círculos, o sea dos para fijar la posición del centro con referencia a cualquier par de ejes arbitrariamente dados y uno para dar la longitud del radio.

Si ahora el lector desea visualizar un espacio de cuatro dimensiones puede pensar que son líneas *rectas*, en lugar de puntos, los elementos de que está construido nuestro común espacio "sólido". En lugar de nuestro conocido espacio sólido constituido por una aglomeración de puntos infinitamente diminutos, ahora semeja un almiar cósmico de pajas infinitamente delgadas e infinitamente largas y rectas. Pueden apreciarse en efecto, las cuatro dimensiones en las líneas rectas, si nos convencemos (como podemos hacerlo) de que precisamente son necesarios y suficientes cuatro números para individualizar una determinada paja en nuestro almiar. La "dimensionalidad" de un "espacio" puede ser cualquiera que elijamos, siempre que seleccionemos adecuadamente los elementos (puntos, líneas, círculos, etc.) con los cuales lo construimos. Como es natural, si para construir nuestro espacio nos valemos de puntos, nadie que no sea un loco puede conseguir visualizar un espacio de más de tres dimensiones.

La física moderna está enseñando a rechazar la creencia en un misterioso "espacio absoluto" sobre y por encima de los "espacios matemáticos", por ejemplo el de Euclides, que han sido construidos por los geómetras para relacionar sus experiencias físicas. La Geometría actual es en gran parte una cuestión de Análisis, pero la antigua terminología de "puntos", "líneas", "distancias", etc., es útil para sugerirnos algunas cosas interesantes que pueden hacerse con nuestros conjuntos de coordenadas. Pero no hay que deducir que estas cosas son las más útiles que pueden hacerse en Análisis; llegará algún día en que todas ellas resulten relativamente sin importancia frente a cosas más significativas, y si nosotros, fanáticos por nuestras tradiciones anticuadas, las continuamos haciendo, es porque carecemos de imaginación.

Aun queda por descubrir si existe alguna misteriosa virtud en hablar de las situaciones que surgen en el Análisis como si nos remontáramos a las figuras trazadas por Arquímedes en el polvo. Las figuras al fin y al cabo únicamente son adecuadas para los niños pequeños, y Lagrange se abstuvo completamente de esos auxilios infantiles cuando compuso su Mecánica Analítica.

Nuestra tendencia a "geometrizar" el Análisis puede ser una prueba de que todavía no hemos crecido suficientemente. Newton mismo, como es sabido, llegó primeramente a sus maravillosos resultados por la vía analítica, y luego los revistió con las demostraciones de Apolonio, en parte debido a que sabía que la multitud, los matemáticos de menos talento que él, sólo creían que un teorema era cierto al verlo acompañado de una excelente figura y una perfecta demostración euclidiana, en parte debido a que él mismo aun daba la preferencia a la oscuridad precartesiana de la Geometría.

La última de las grandes invenciones de Cayley que hemos elegido para hacer mención de ella es la de las matrices y su Álgebra en sus más amplias líneas. El tema se originó en una memoria escrita el año 1858 y se desarrolló partiendo de las simples observaciones sobre la forma en que se combinan las transformaciones (lineales) de la teoría de invariantes algebraicos.

Remontándonos a lo que hemos dicho acerca de los discriminantes y su invariabilidad, señalemos la transformación (la flecha (→)debe leerse aquí "es reemplazado por") $y \to \dfrac{px+q}{rx+s}$

Supongamos que tenemos dos de esas transformaciones,

$$y \to \frac{px+q}{rx+s}$$

$$x \to \frac{Pz+Q}{Rz+S}$$

la segunda de las cuales debe ser aplicada a la x de la primera. Tendremos

$$y \to \frac{(pP+qR)+(pQ+Qs)}{(rP+sR)+(rQ+sS)}$$

Atendiendo únicamente a los coeficientes en las tres transformaciones los dispondremos en cuadros, así

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{vmatrix}$$

y vemos que el resultado de realizar las dos primeras transformaciones sucesivamente podrían haber sido escritas por la siguiente regla de "multiplicación"

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{vmatrix}$$

donde las filas de los cuadros de la derecha se obtienen de un modo fácil aplicando las filas del primer cuadro de la izquierda a las columnas del segundo. Tales disposiciones (de cualquier número de filas y columnas) se denominan matrices. Su álgebra se deduce de algunos sencillos postulados, de los cuales tan sólo necesitamos citar el siguiente. Las matrices

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

son iguales (por definición) cuando a $= A$, $b = B$, $c = C$, $d = D$, y sólo en este caso. La suma de las dos matrices mencionadas es la matriz

$$\begin{vmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{vmatrix}$$

El resultado de multiplicar

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times m$$

(m cualquier número) es la matriz

$$\begin{vmatrix} am & bm \\ cm & dm \end{vmatrix}$$

La regla para "multiplicar" $\times$ (o "componer") matrices se deduce del ejemplo anterior

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}$$

Un rasgo distintivo de estas reglas es que la multiplicación no es conmutativa, salvo para tipos *especiales* de matrices. Por ejemplo, por la regla tendremos

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Pp+Qr & Pq+Qs \\ Rp+Sr & Rq+Ss \end{vmatrix}$$

y la matriz de la derecha no es igual de la que resulta de la multiplicación

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix}$$

Todos estos detalles, particularmente el último, han sido mencionados para ilustrar un fenómeno que se repite frecuentemente en la historia de la Matemática: las herramientas matemáticas necesarias para las aplicaciones científicas muchas veces han sido inventadas algunas décadas antes de que se haya imaginado la ciencia para la cual la Matemática constituye la clave. La extraña regla de "multiplicación" de matrices, mediante la cual tenemos diferentes resultados según el orden en que practiquemos la multiplicación (a diferencia del Álgebra común, donde $x \times y$ es siempre igual a $y \times x$), parecía que no podría tener ningún uso científico o práctico. Sin embargo, sesenta y siete años después de que Cayley la inventara, Heisenberg, en 1925, reconoció que el Álgebra de matrices era justamente la herramienta que necesitaba para sus trabajos revolucionarios en la mecánica cuántica.

Cayley continuó su actividad creadora hasta la misma semana de su muerte, que tuvo lugar el 26 de enero de 1895, después de una larga y dolorosa enfermedad, tolerada con resignación e inflexible valor. Recordaremos las últimas frases de la biografía de Forsyth. "Fué más que un matemático. Siguiendo un único objetivo, que Wordsworth podría haber elegido para su "Guerrero Feliz", perseveró hasta última hora en el noble ideal de su vida. Su vida tuvo una influencia significativa sobre quienes le conocieron [Forsyth era discípulo de Cayley y fue su sucesor en Cambridge]; ellos admiraron su carácter tanto como respetaron su genio, y se dieron cuenta de que con su muerte el mundo había perdido un gran hombre".

Gran parte de la obra de Cayley ha pasado a la Matemática ordinaria, y es probable que muchas de las investigaciones expuestas en sus *Collected Mathematical Papers* (trece grandes volúmenes en cuarto de cerca de 600 páginas cada uno, comprendiendo 966 trabajos), sugerirán labores provechosas a los matemáticos de las generaciones futuras. En la actualidad, la moda se ha alejado de los campos que mayor interés despertaron a Cayley, y lo mismo puede decirse de Sylvester, pero la Matemática tiene la costumbre de volver a sus antiguos problemas para reunirlos en una síntesis de mayor alcance.

En 1883 Henry John Stephen Smith, el brillante especialista irlandés en la teoría de números y profesor saviliano de Geometría en la Universidad de Oxford, murió en lo mejor de su labor científica, a los 57 años de edad. Oxford invitó al anciano Sylvester, que entonces tenía 70 años, para ocupar la cátedra vacante. Sylvester aceptó la proposición con gran dolor de sus innumerables amigos de América. Pero sentía la nostalgia de su tierra nativa, aunque no le había tratado con demasiada generosidad. Es posible que también le produjera cierta satisfacción darse cuenta de que "la piedra que los constructores habían rechazado iba a ser la piedra fundamental".

El anciano llegó a Oxford para ocupar su cargo con una nueva teoría matemática ("Reciprocantes", invariantes diferenciales) que comunicar a sus discípulos mejor preparados. Cualquier elogio o justo reconocimiento incitaba siempre a Sylvester a superarse. Aunque en la investigación citada se le había adelantado el matemático francés Georges Halphen, estampó en ella su peculiar genio, dándole vida con su imborrable individualidad.

La conferencia inaugural, pronunciada el 12 de diciembre de 1885, en Oxford, cuando Sylvester tenía 71 años, reveló el fuego y entusiasmo de sus primeros años, y quizá más, pues ahora se sentía seguro y no ignoraba que al fin había sido reconocido por aquel mundo al cual había combatido. Dos de sus párrafos proporcionarán cierta idea del estilo de la conferencia.

"La teoría que voy a exponer, o cuyo nacimiento voy a anunciar, se halla con respecto a ésta ["la gran teoría de los invariantes"] en una relación que no es la de una hermana menor, sino la de un hermano, el cual, basado sobre el principio de que lo masculino es más digno que lo femenino, o, en todo caso, de acuerdo con las disposiciones de la ley sálica, tiene derecho de precedencia sobre su hermana mayor, y ejercerá el mando supremo sobre sus reinos unidos".

Comentando la inexplicable ausencia de un término en cierta expresión algebraica, se entrega a la lírica.

"En el caso que tenemos ante nosotros, esta inesperada ausencia de un miembro de la familia, cuya presencia podía esperarse produce una impresión tal sobre mi mente que llega a actuar sobre mis emociones, Es como una especie de Pléyade perdida en una constelación algebraica, y, finalmente, meditando sobre el tema, mis sentimientos encuentran o buscan alivio en una efusión poética, *un jeu de sottise,* que, no sin temor de parecer extravagante, me aventuro a escribir. Al menos servirá como un interludio y proporcionará cierto alivio al esfuerzo de vuestra atención antes de que prosiga haciendo mis observaciones finales sobre la teoría general.

A UN MIEMBRO QUE FALTA
En Una Familia de Términos en una Fórmula Algebraica

Aislado, mantenido al margen, separado por el destino
de tus camaradas que te esperan ¿a dónde has huido?
¿Dónde languideces después del estado que te ha maravillado
como una estrella perdida en un meteoro fugaz?
Me haces pensar en ese presuntuoso,
que quería, aunque inferior al mayor, ser grande,
y cayó, con la cabeza inclinada, desde lo alto de la inmensidad celeste
para vivir aislado, replegado sobre si mismo, desolado,
o el que, nuevo Heraclio, sufrió duro exilio,
sostenido unas veces por la esperanza, y otras torturado de espanto
hasta que la soberana Astrea, murmurándole al oído
palabras de vago presagio a través del rumor del Atlántico
le abrió el santuario de la Musa venerada
y sembró de llamas el polvo de las orillas de Isis

Después de haber recobrado nuevas fuerzas y bañado las puntas de los dedos en la primavera pieriana, volveremos por breves momentos al banquete de la razón, y haremos algunas reflexiones generales que surgen naturalmente del tema de mi discurso".

Las ideas de Sylvester respecto al parentesco de la Matemática con las bellas artes encuentra su expresión en sus escritos. Así, en un trabajo sobre las reglas de Newton para el descubrimiento de las raíces imaginarias de las ecuaciones algebraicas, se pregunta en un pie de página: "¿No puede definirse la música como la Matemática de los sentidos, y la Matemática como la música de la razón? El músico siente la Matemática, el matemático piensa la música, la música es el sueño, la Matemática la vida laboriosa, cada una de ellas recibirá el apoyo de la otra cuando la inteligencia humana, elevada a su tipo perfecto, brille llena de gloria en algún futuro Mozart-Diriclilet, o Beethoven-Gauss, ¡una unión ya claramente anunciada en el genio y en los trabajos de Helmholtz!".

Sylvester amó la vida aun cuando se viera forzado a luchar contra ella. Se jactaba de que los grandes matemáticos, salvo aquellos casos en que se trató de muertes accidentales o evitables, han vivido largo tiempo, conservando una mente vigorosa hasta el día de su muerte. En su discurso a la *British Association,* en 1869, decía, en apoyo de su tesis, al enumerar algunos de los grandes matemáticos del pasado y recordar la época de su muerte, que " ... no hay ningún estudio en el mundo que dé lugar a una acción más armónica de todas las facultades de la mente que la Matemática... o, como ésta, parezca elevarlas por sucesivos pasos hasta estados cada vez más altos de existencia intelectual consciente... El matemático vive mucho y vive joven; las alas del alma no se abaten precozmente ni se ocluyen sus poros con las partículas levantadas en los caminos polvorientos de la vida vulgar".

Sylvester era un ejemplo vivo de su propia filosofía, pero al fin tuvo que inclinarse ante los años. En 1893, teniendo 79 años, su vista comenzó a declinar y se sintió cada vez más triste y desalentado al no poder pronunciar sus lecciones con su antiguo entusiasmo. El año siguiente pidió ser relevado de sus más honrosos deberes de la cátedra, y se retiró a vivir solo en Londres o en Tunbridge Wells. Hacía tiempo que sus hermanos y hermanas habían muerto, y también había sobrevivido a sus más queridos amigos.

Su mente se conservaba aún vigorosa, aunque él mismo sentía que la agudeza de su capacidad inventiva se había embotado para siempre. Más tarde, en 1896, cuando tenía 82 años, sintió renovado entusiasmo por una cuestión que siempre le había fascinado, y volvió a trabajar sobre la teoría de las particiones compuestas y la conjetura de Goldbach de que todo número par es la suma de dos primos.

Su trabajo no se prolongó mucho tiempo. Mientras estaba dedicado a sus estudios matemáticos en su alojamiento de Londres, siendo los primeros días de marzo de 1897, sufrió un ataque de parálisis que le privó del habla. Murió el 15 de marzo de 1897, a la edad de 83 años. Su vida puede resumirse con sus propias palabras: "Amo realmente mis estudios".